d'où $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ et par suite f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $\mathbf{R}$.

2°/• La fonction $x \to \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme composée et quotient des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}^*$.

• ***Dérivabilité de f en 0*** :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-\frac{1}{4x^2}}}{x}\right)^4$$

$$= \lim_{x\to 0}(-4x)^4\left(-\frac{1}{4x^2}\cdot e^{-\frac{1}{4x^2}}\right)^4 = 0$$

car $\lim_{x\to 0} -\dfrac{1}{4x^2}\cdot e^{-\frac{1}{4x^2}} = \lim_{X\to -\infty}(Xe^X) = 0$ et par suite f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Conclusion : f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

3°/ On remarque que f est une fonction impaire, il suffit de faire l'étude sur $[0,+\infty[$

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}x^3 - 3x^2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}(2-3x^2)}{x^6}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2-3x^2$.

x	0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	M	↘	0

$M = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$